www.tunisie-etudes.info

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION	
Concours d'aptitude au professorat de l'enseignement secondaire	
EPREUVE : SESSION DE SEPTEMBRE 2003	
EPREUVE : MATHEMATIQUE	**DUREE:** 4 heures

Durée : 4 heures — Nombre de pages = 3

Exercice 1.

Le plan euclidien est muni du produit scalaire usuel.
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs, on notera $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ leur produit scalaire et AB la distance du point A au point B.

Première partie

1) Soit A et B deux points distincts et O leur milieu. Montrer que pour tout point M du plan, on a

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - OA^2.$$

et en déduire l'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.
2) Soit C un cercle de centre A et de rayon R et B un point extérieur à ce cercle (i.e. $AB > R$).
2a) Soit M un point de C tel que la droite (BM) soit tangente à C.
Que peut-on dire de $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$? Exprimer MB en fonction de AB et R.
2b) Indiquer une construction à la règle et compas des tangentes à C issues de B.
3) Déterminer l'ensemble des points B du plan par lesquels on peut mener deux tangentes perpendiculaires au cercle C.
4) On considère une droite (T) du plan. Construire la ou les tangentes au cercle C qui sont parallèles à (T).

Deuxième partie

On rappelle qu'un quadrilatère $ABCD$ est convexe si deux sommets consécutifs quelconques de $ABCD$ sont d'un même côté de la droite passant par les deux autres sommets.
On dira qu'un quadrilatère convexe $ABCD$ vérifie la propriété ($\mathcal{P}$) si

$$AB + CD = AD + BC.$$

Dans cette partie, on se propose de montrer qu'un quadrilatère convexe $ABCD$ vérifie la propriété ($\mathcal{P}$) si et seulement si il est circonscrit à un cercle.

1) On suppose que le quadrilatère est circonscrit à un cercle C de rayon R (i.e. ses quatre côtés sont tangents au cercle). Montrer que

$$AB + CD = AD + BC$$

et en déduire que l'aire du quadrilatère $ABCD$ vaut $R \times (AB + CD)$.

2) Montrer qu'un parallélogramme circonscrit à un cercle est nécessairement un losange.

3) Montrer que si $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB + CD = AD + BC$ alors $ABCD$ est circonscrit à un cercle.

4) On suppose que $ABCD$ est tel que les droites (AD) et (BC) sont sécantes en un point O.

On suppose de plus que $AB + CD = AD + BC$.

On considère le cercle C inscrit dans le triangle OAB. On désigne par (T) la tangente au cercle C qui est parallèle à (CD) et qui coupe les côtés $[OA]$ et $[OB]$ respectivement en D' et C'.

4a) Expliquer pourquoi le quadrilatère $ABC'D'$ vérifie la propriété ($\mathcal{P}$).

4b) Montrer alors que que $C = C'$ et $D = D'$. Conclure.

Exercice 2.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et A un endomorphisme de E vérifiant

$$(A - I)(A - \lambda I) = 0 \ , \ \ \lambda \neq 1.$$

On pose

$$P = \frac{1}{1-\lambda}(A - \lambda I) \ , \ \ Q = \frac{1}{\lambda - 1}(A - I)$$

PUISSANCE INFOR... DEBALI Centre Aissa - RCI 20.. El Men..

1) Montrer que $P + Q = I$, $PQ = 0$, $P^2 = P$ et $Q^2 = Q$.

2) Montrer que $AP = P$ et $AQ = \lambda Q$ et en déduire que, pour tout entier naturel n,

$$A^n = P + \lambda^n Q.$$

3) Montrer que si $|\lambda| < 1$, alors $\lim_{n\to\infty} A^n = P$.

4) Application. On considère la matrice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4a) Déteminer λ tel que $(A - I)(A - \lambda I) = 0$, et écrire la matrice $\lim_{n\to\infty} A^n$.

4b) On considère les suites x_n, y_n et z_n définies par

$$x_0 = 5,\ y_0 = 10,\ z_0 = 90,\ x_{n+1} = \frac{y_n + z_n}{2},\ y_{n+1} = \frac{z_n + x_n}{2},\ z_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

Montrer que ces suites convergent et déterminer leurs limites.